Лабораторная работа 4.

Дискретное преобразование Фурье в упрощённом виде.

Платформа:

<https://tio.run/>

Цели:

* Знакомимся с преобразованием Фурье
* Закрепляем работу с массивами
* Работаем с математическим аппаратом

Синопсис, тезисно:

* Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – очень мощный инструмент, позволяющий отыскать и выделить периодические факторы в потоке данных
* ДПФ используется во многих окружающих нас вещах, о которых мы зачастую не задумываемся:
  + Сотовая связь
  + Аудио- и видео- данные (кодирование и декодирование)
  + Изображения (например, JPEG)
  + Астрономия (вычисление периода обращения экзопланет вокруг звёзд)

Описание:  
Идея ДПФ заключается в том, что любой набор значений изменяющегося с течением времени исследуемого ряда данных можно представить, как сумму синусов с разными частотами F и амплитудами А – т.е. как сумму некоторого количества слагаемых вида А\*sin(F\*t).  
Результат ДПФ – вычисленные значения А и F в виде либо одного массива   
[(A1, F1), (A2, F2), …]  
Либо двух массивов – одного для амплитуд, второго – для частот.

То, что вы можете наблюдать на графическом эквалайзере – результат ДПФ, выполняющийся над небольшим отрезком записанного звука, выполняющийся порядка 15-30 раз в секунду с визуализацией амплитуд по вертикали, а частот – по горизонтали.

Другим важным фактом является возможность используя такой массив, сгенерировать исходный звук на основании данных о частотах, амплитудах и продолжительности фрагмента, преобразованного с помощью ДПФ.

Проанализируем, сколько нам понадобится памяти для оцифровки одной секунды звука без ДПФ и с ДПФ.  
1. Без ДПФ.

* первый важный вопрос: с какой частотой мы измеряем амплитуду звукового сигнала? Согласно теорема Котельникова, нам нужно изменять значение как минимум с частотой в 2 раза выше, чем максимальная частота, которую мы хотим «услышать» в записи – если оптимистично оценить порог слуха человека в 10кГц, то нам придется измерять значения 20000 раз в секунду. Такая частота называется частотой дискретизации.
* второй вопрос – сколько значений по амплитуде сигнала мы можем выделять? Предположим, что мы используем 1 байт для хранения амплитуды сигнала в пределах -128..127. Для записи речи этого достаточно.
* Итого получается, что запись 1 секунды звука без потерь качества (PCM или ИКМ в русской литературе), у нас займёт 40Кбайт.

2. С ДПФ

* Преобразовывать целиком одну секунду достаточно сложно с точки зрения вычислительной сложности, поэтому обычно используется «нарезка» звука на небольшие фрагменты, часто называемые сэплами. Например, в 1 секунде записи в формате mp3 может содержаться порядка 100 сэмплов. (Процесс на самом деле сложнее, мы сознательно его упрощаем и отбрасываем фреймы как смысловые единицы)
* Таким образом, мы получаем 100 ДПФ преобразований для записи 1 секунды. Второй вопрос – сколько разных частот мы используем для ДПФ? Ответ может сильно отличаться от целевого качества звука, но для речи достаточно выделить порядка 10 частот. И с помощью ДПФ просчитать амплитуды на этих частотах.
* Итого для оцифровки 1 секунды нам требуется 100 \* 10 байт для хранения амплитуд (тоже в наших абстрактных единицах -128..127). Итого – порядка 1Кбайт. Качество будет низкое, но размер файла в 40 раз меньше.

В лабораторной работе мы будем:

- генерировать массив с сигналом, характеристики которого мы знаем (частоты, амплитуды), но далее работать с этим массивом так же, как бы мы работали с данными, о которых мы ничего не знаем.

- преобразовывать массив данных в частоты с помощью ДПФ и исследовать исходную функцию.

Задание:

Есть смешанные сигналы на частотах f = [f1, f2, ...] c амплитудой a = [a1, a2, ...]

1. f = [100], a = [1]

2. f = [100, 300, 700], a = [1, 1, 1]

3. f = [100, 300, 700], a = [3, 2, 1]

f(t) = sum(Ai \* cos(t\*Fi))

- Частота дискретизации подбирается самостоятельно (~10000)

- Количество базовых частот для ДПФ подбирается самостоятельно

Задача 1.

Сгенерировать 1 секунду сигнала по заданным характеристикам (1), (2), (3)

Задача 2 (основная)

- Преобразовать полученные значения (задача 1) в частоты.

- Визуализировать в Excel

- Подобрать оптимальные значения частоты дискретизации.

- Оценить сжатие данных в результате использования ПФ.

Задача 3.

- Добавить к каждому элементу массива данных случайное число (нецелочисленное), проверить, работает ли ДПФ после такого радикального изменения исходных данных.  
- Оценить порядок множителя добавляемого случайного числа в оригинальный сигнал, при котором ДПФ позволяет выделять частоты.

Варианты:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | Haskell | 6 | PHP |
| 2 | Lua | 7 | Java |
| 3 | JavaScript | 8 | Go |
| 4 | Python | 9 | Ruby |
| 5 | C(любой) |